جبرخطی کاربردی

درس۱۲

تجزیه مقادیر منفرد

گروه سیستم و کنترل - ۱۳۸۸

مدرس: صدقی زاده

مقدار منفرد (Singular Value)

- برای ماتریس $A_{m\times n}$،

$\boxed{A^T A\ ,\ \ AA^T}$ $\rightarrow$ ماتریس مثبت معین یا نیمه معین

۱- متقارن

۲- مقادیر ویژه حقیقی و غیر منفی

۳- بردارهای ویژه متعامد

مثال۱

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} \rightarrow A^T A=\begin{bmatrix}6 & 1\\ 1 & 6\end{bmatrix}\ ,\ \ AA^T=\begin{bmatrix}5 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس $A^T A$ و AA^T ،

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = (\lambda-5)(\lambda-7) \rightarrow \lambda_1 = 7, \lambda_2 = 5 \rightarrow \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - AA^T\right| = \lambda(\lambda-5)(\lambda-7) \rightarrow \lambda_1 = 7, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 0$$

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}\frac{-1}{5}\\ \frac{-3}{5}\\ 1\end{bmatrix}$$

مقدار منفرد (Singular Value)

مقادیر منفرد ماتریس A برابر است با جذر مقادیر ویژه ماتریس $A^T A$

مثال۲

مقادیر منفرد ماتریس A بصورت زیر است،

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left|\lambda I - A^T A\right| = (\lambda - 5)(\lambda - 7) \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 5$$

$$\sigma_1 = \sqrt{7}, \quad \sigma_2 = \sqrt{5}$$

- در نرم افزار MATLAB دستور svd(A) و svds(A,k) وجود دارد.

کاربردها

- بدست آوردن رتبه ماتریس
- محاسبه عدد حالت ماتریس (condition number) و تشخیص سیستم های ill condition

بدست آوردن رتبه ماتریس بر اساس مقادیر منفرد

رتبه یک ماتریس برابر است با تعداد مقادیر منفرد غیر صفر آن ماتریس

مثال۳

با توجه به مقادیر منفرد ماتریس A رتبه ماتریس دو و رتبه ماتریس B سه است،

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \sigma_1 = \sqrt{7}, \quad \sigma_2 = \sqrt{5} \quad \rightarrow \quad rank(A) = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \sigma_1 = \sqrt{18}, \quad \sigma_2 = \sqrt{8}, \quad \sigma_3 = 1 \quad \rightarrow \quad rank(B) = 3$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \sigma_1 = 9.903, \quad \sigma_2 = 4.993, \quad \sigma_3 = 0 \quad \rightarrow \quad rank(C) = 2$$

محاسبه عدد حالت یا عدد شرطی (Condition Number)

برای ماتریس $A_{m\times n}$ نسبت بزرگترین مقدار منفرد به کوچکترین مقدار منفرد را **عدد حالت** ماتریس می نامند،

$$\boxed{\kappa = \|A\|\|A^{-1}\| = \frac{\sigma_1}{\sigma_k} \quad , \quad \kappa \ge 1}$$

اگر κ مقدار کوچکی باشد ← **خوش حالت** well condition

بردارهای ستونی ماتریس بخوبی مستقل خطی هستند

اگر κ مقدار بزرگی باشد ← **بد حالت** ill condition

بردارهای ستونی ماتریس نزدیک به وابستگی خطی هستند و ماتریس در حال منفرد شدن است.

خطای محاسباتی در معکوس کردن ماتریس A زیاد است.

مثال۵ **کاربرد عدد حالت در بررسی میزان حساسیت دستگاه معادلات**

فرض کنید نتایج انجام یک سری آزمایشات تجربی منجر به بدست آمدن چنین دستگاه معادلات ماتریسی گردد،

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34.7177 \\ 70.9241 \\ 82.9271 \end{bmatrix}$$

از آنجائیکه $|A| = -1.9170 \ne 0$ است، می توان آن را بصورت زیر حل کرد،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 34.7177 \\ 70.9241 \\ 82.9271 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.8000 \\ 0.7000 \end{bmatrix}$$

حال اگر این نتایج حاصل از یک اندازه گیری از یک آزمایش عملی باشد، در اینصورت این احتمال وجود دارد که برخی از ارقام را به منظور سهولت در محاسبات گرد کنیم. با این فرض نتایج را مجدداً بررسی می نماییم،

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 34.7 \\ 70.9 \\ 82.9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.68294 \\ 8.92282 \\ -3.50254 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می شود ، نتایج بطور چشمگیری تغییر نموده است.

بررسی علت موضوع

ابتدا مقادیر منفرد ماتریس A را بدست می آوریم،

$$A=\begin{bmatrix} 93.477 & 10.202 & -28.832 \\ 1.963 & 32.816 & 62.414 \\ 26.821 & 36.816 & 57.234 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1=100.0004, \quad \sigma_2=100.0000, \quad \sigma_3=0.0002$$

حال عدد حالت را بدست آوریم،

$$\kappa_A=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}=\frac{100.0004}{0.0002}=5.2164\times10^5>>1$$

عدد حالت مقدار بسیار بزرگی است، لذا ماتریس A نزدیک به منفرد شدن است. در این صورت اعمال تغییرات بسیار کوچکی در بردار $\mathbf{b}$ سبب بروز خطای بزرگی در بردار $\mathbf{x}$ می شود.

- دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید،

$$\boxed{A_{n\times n}\mathbf{x}_{n\times1}=\mathbf{b}_{n\times1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}}$$

- اگر $\mathbf{b}$ شامل نویز یا خطاهای محاسباتی ناشی از گرد کردن مانند $\Delta\mathbf{b}$ باشد، در اینصورت این خطا بصورت زیر در پاسخ ظاهر خواهد شد،

$$\boxed{\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}=A^{-1}(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}) \quad \rightarrow \quad \Delta\mathbf{x}=A^{-1}\Delta\mathbf{b}}$$

از این رابطه می توان نتیجه گرفت،

$$\boxed{\|\Delta\mathbf{x}\|\le\|A^{-1}\|\ \|\Delta\mathbf{b}\|}$$

- برای $\|A^{-1}\|$ های کوچک $\leftarrow$ مقدار $\|\Delta\mathbf{x}\|$ کوچک است، اگر $\|\Delta\mathbf{b}\|$ مقدار کوچکی داشته باشد.
- برای $\|A^{-1}\|$ های بزرگ $\leftarrow$ مقدار $\|\Delta\mathbf{x}\|$ بزرگ است، حتی اگر $\|\Delta\mathbf{b}\|$ مقدار کوچکی باشد.

تجزیه ماتریس ها بر اساس مقادیر منفرد (Singular Value Decomposition)

- برای ماتریس $A_{m\times n}$ با رتبه k،

$$\boxed{A = U\Sigma V^T}$$

ماتریس متعامد $m\times m$
بردار ویژه AA^T

ماتریس متعامد $n\times n$
بردار ویژه A^TA

ماتریس $m\times n$ با عناصر قطری مقادیر منفرد

$$\boxed{\begin{array}{c} \Sigma_{m\times n} = \mathrm{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_p) \\ \sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_k > 0 \quad , \quad \sigma_{k+1} = \cdots = \sigma_p = 0 \end{array}}$$

- دستور [U,S,V] = svd(A) در نرم افزار MATLAB وجود دارد.

مثال ۶

ماتریس A را توسط مقادیر منفرد تجزیه نمایید.

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} = U\Sigma V^T$$

باید ماتریس $A_{2\times 3}$ را بصورت $A = U\Sigma V^T$ تجزیه کنیم.

برای بدست آوردن ماتریس $U_{2\times 2}$ باید بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس AA^T را بیابیم.

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس AA^T را بدست می آوریم،

$$\left|\lambda I - AA^T\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 11 & -1 \\ -1 & \lambda - 11 \end{vmatrix} = (\lambda - 12)(\lambda - 10)$$

لذا مقادیر ویژه ماتریس AA^T عبارتند از،

$$\lambda_1 = 12, \qquad \lambda_2 = 10$$

ماتریس AA^T دو مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد. حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می آوریم،

$$(AA^T - \lambda_1 I)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(AA^T - \lambda_2 I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $U_{2\times 2}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

لذا ماتریس متعامد $U_{2\times 2}$ بشکل زیر بدست می آید،

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ماتریس $V_{3\times 3}$ نیز باید از بردارهای ویژه یکامتعامد ماتریس $A^T A$ بدست آید. مقادیر ویژه ماتریس $A^T A$ بصورت زیر است،

$$\lambda_1 = 12, \quad \lambda_2 = 10, \quad \lambda_3 = 0$$

ماتریس $A^T A$ سه مقدار ویژه حقیقی و متمایز دارد. حال بردارهای ویژه متناظر با هر یک از آنها را بدست می آوریم،

$$(A^T A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A - \lambda_3 I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $V_{3\times 3}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

ماتریس متعامد $V_{3\times 3}$ بصورت زیر بدست می آید،

$$V=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

نهایتاً ماتریس $\Sigma_{2\times 3}$ با استفاده از مقادیر منفرد محاسبه شده بصورت زیر بدست می آید،

$$\Sigma_{2\times 3}=\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین، تجزیه به مقادیر منفرد ماتریس A بصورت زیر بدست می آید،

$$A=U\Sigma V^T=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

- با استفاده از دستور [u,s,v] = svd(A) در نرم افزار MATLAB داریم

```
A =[3 1 1;-1 3 1]
[u,s,v]= svd(A)
u =
     0.7071    0.7071
     0.7071   -0.7071
s =
     3.4641         0         0
          0    3.1623         0
v =
     0.4082    0.8944    0.1826
     0.8165   -0.4472    0.3651
     0.4082   -0.0000   -0.9129
```

کاربردهای تجزیه مقادیر منفرد

- بدست آوردن چهار زیر فضای اصلی ماتریس (fundamental subspaces)

$$\boxed{R(A), N(A), R(A^T), N(A^T)}$$

- محاسبه نُرم ماتریس ها

- محاسبه شبه معکوس (pseudo inverse) ← حل مسئله حداقل مربعات در حالت کلی

- تقریب ماتریس با یک ماتریس رتبه پایین ← کاهش نویز و فشرده سازی داده ها

بدست آوردن چهار زیرفضای اصلی ماتریس

$$\boxed{A = U\Sigma V^T \quad \rightarrow \quad AV = U\Sigma \quad \rightarrow \quad A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i}$$

بردارهای منفرد راست
(right singular vectors)

بردارهای منفرد چپ
(left singular vectors)

هر بردار $\mathbf{v}_i$ به یک بردار متناظر مانند $\mathbf{u}_i$ نگاشت می شود، که اندازه این نگاشت برابر با σ_i است.

$$\mathbf{v}_i \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow \sigma_i \mathbf{u}_i$$

چهار زیرفضای اصلی ماتریس

- با در نظر گرفتن مقادیر منفرد صفر ماتریس $A_{m\times n}$،

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{u_1 \quad \cdots \quad u_k}_{Basis\ \ for\ R(A)} & \underbrace{u_{k+1} \quad \cdots \quad u_m}_{Basis\ \ for\ N(A^T)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \sigma_k & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} v_1^T \\ \vdots \\ v_k^T \\ \hline v_{k+1}^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} Basis\ \ for\ R(A^T) \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} Basis\ \ for\ N(A) \end{array}$$

$$A = \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T$$

$$i = 1,\ldots,k \quad , \quad A\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i\sigma_i \neq \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}_i \in R(A)$$

$$i = k+1,\ldots,m \quad , \quad \mathbf{u}_i^T A = \sigma_i \mathbf{v}_i^T = \mathbf{0} \rightarrow A^T\mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}_i \in N(A^T)$$

$$i = 1,\ldots,k \quad , \quad \mathbf{u}_i^T A = \sigma_i \mathbf{v}_i^T \neq \mathbf{0} \rightarrow A^T\mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_i \in R(A^T)$$

$$i = k+1,\ldots,n \quad , \quad A\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i\sigma_i = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_i \in N(A)$$

- ماتریس A مانند تبدیلی است که فضای سطرها یعنی $R(A^T)$ را به فضای ستون ها یعنی $R(A)$ و فضای پوچی یعنی $N(A)$ را به فضای پوچی چپ یعنی $N(A^T)$ می نگارد.

مثال ۷

با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد پایه های چهار زیر فضای اساسی ماتریس A را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -7 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -9 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & -6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 0.1815 & -0.8445 & 0.2953 & 0.4082 \\ 0.4784 & -0.2043 & 0.2504 & -0.8165 \\ 0.7753 & 0.4359 & 0.2055 & 0.4082 \\ 0.3701 & -0.2347 & -0.8988 & 0 \end{array}\right]_{\text{basis for R(A)} \ \ \text{basis for N(A}^T\text{)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 18.2244 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.3717 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8875 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|cc} 0.0788 & -0.0732 & 0.8463 & -0.5050 & 0.1313 \\ 0.4085 & -0.2240 & 0.2457 & 0.6504 & 0.5473 \\ -0.7383 & 0.3748 & 0.3548 & 0.4331 & 0.0307 \\ 0.3421 & 0.0302 & 0.3110 & 0.3596 & -0.8100 \\ -0.4059 & -0.8961 & 0.0283 & 0.0719 & -0.1620 \end{array}\right]^T_{\text{basis for R(A}^T\text{)} \ \ \text{basis for N(A)}}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 0.1815 & -0.8445 & 0.2953 & 0.4082 \\ 0.4784 & -0.2043 & 0.2504 & -0.8165 \\ 0.7753 & 0.4359 & 0.2055 & 0.4082 \\ 0.3701 & -0.2347 & -0.8988 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|cc} 18.2244 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.3717 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8875 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccccc} 0.0788 & 0.4085 & -0.7383 & 0.3421 & -0.4059 \\ -0.0732 & -0.2240 & 0.3748 & 0.0302 & -0.8961 \\ 0.8463 & 0.2457 & 0.3548 & 0.3110 & 0.0283 \\ \hline -0.5050 & 0.6504 & 0.4331 & 0.3596 & 0.0719 \\ 0.1313 & 0.5473 & 0.0307 & -0.8100 & -0.1620 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{basis for R(A}^T\text{)} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} \text{basis for N(A)} \end{array}$$

بدست آوردن نُرم ماتریس ها

- نُرم یک ماتریس حداکثر بزرگنمایی یا بهره آن را تحت چنین تبدیلی نشان می دهد،

$$\mathbf{x} \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow A\mathbf{x}$$

$$\boxed{\|A\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} gain(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}}$$

طبق تجزیه مقادیر منفرد داریم،

$$\mathbf{v}_i \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow \sigma_i\mathbf{u}_i$$

$$\boxed{\|A\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|Av_i\|}{\|v_i\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\sigma_i u_i\|}{\|v_i\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\sigma_i\|u_i\|}{\|v_i\|} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \sigma_i}$$

$$\boxed{\|A\| = \sigma_1 \quad , \quad \|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n}}$$

مثال۸

با محاسبه مقادیر منفرد ماتریس ها نُرم ماتریس های زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_1 = 9.7714, \quad \sigma_2 = 5.8467, \quad \sigma_3 = 1.1552 \rightarrow \|A\| = 9.7714$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1 \rightarrow \|B\| = 1$$ ماتریس متعامد

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_1 = 7, \quad \sigma_2 = 4, \quad \sigma_3 = 3 \rightarrow \|C\| = 7$$ ماتریس قطری